Strumenti Matematici per la Fisica

Strumenti Matematici per la Fisica

- Approssimazioni
- Potenze di 10
- Notazione scientifica (o esponenziale)
- Ordine di Grandezza
- Prefissi: Multipli e Sottomultipli
- Sistema Metrico Decimale
- Equivalenze
- Proporzioni e Percentuali
- Relazioni fra Grandezze Fisiche
- Funzioni Goniometriche
- Radianti

Approssimazioni

Approssimare un numero ad una data cifra decimale significa **eliminare** tutte le cifre che **seguono** la cifra decimale a cui vogliamo approssimare il nostro numero.
Nell'eliminare le cifre eccedenti occorre seguire le seguenti regole:

- **Approssimazione per difetto**: Se **la prima cifra** che si toglie è **minore di 5** allora si elimina tale cifra e tutte quelle che seguono senza fare altro;
- **Approssimazione per eccesso**: Se **la prima cifra** che si toglie è **maggiore o uguale a 5** allora si elimina tale cifra e tutte quelle che seguono **aggiungendo 1** all'**ultima cifra** che resta,facendo attenzione agli eventuali riporti.

Ad esempio, dato il numero 9,9546, eseguiamo le seguenti approssimazioni:

Alla II cifra decimale: $9{,}9546 \sim 9{,}95;$

Alla I cifra decimale: $9{,}9546 \sim 10{,}0;$

Alle unità: $9{,}9546 \sim 10;$

Potenze di 10

$$10^n = \text{Potenza ennesima di 10, dove } \begin{cases} 10 = BASE \\ n = ESPONENTE \end{cases}$$

ESPONENTE POSITIVO

$$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n\ volte}$$

Ad es. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

L'esponente è uguale al numero di zeri che SEGUONO "1" nella forma decimale del numero.

ESPONENTE NEGATIVO

$$10^{-n} = \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{10}}_{n\ volte}$$

Ad es. $10^{-3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}001$

L'esponente è uguale al numero di zeri che PRECEDONO "1" nella forma decimale del numero.

Potenze di 10

$$10^{0} = 1$$

$$10^{a} \cdot 10^{b} = 10^{a+b}$$

$$10^{a} / 10^{b} = 10^{a-b}$$

$$\left(10^{a}\right)^{b} = 10^{a \cdot b}$$

$$\sqrt[b]{10^{a}} = 10^{a/b}$$

Vediamo qualche esempio nei casi in cui $a = \pm 2$ e $b = \pm 3$

$$10^{+2} \cdot 10^{+3} = 10^{[(+2)+(+3)]} = 10^{(+2+3)} = 10^{+5}$$

$$10^{+2} \cdot 10^{-3} = 10^{[(+2)+(-3)]} = 10^{(+2-3)} = 10^{-1}$$

$$10^{-2} \cdot 10^{+3} = 10^{[(-2)+(+3)]} = 10^{(-2+3)} = 10^{+1}$$

$$10^{-2} \cdot 10^{-3} = 10^{[(-2)+(-3)]} = 10^{(-2-3)} = 10^{-5}$$

$$10^{+2} / 10^{+3} = 10^{[(+2)-(+3)]} = 10^{(+2-3)} = 10^{-1}$$

$$10^{+2} / 10^{-3} = 10^{[(+2)-(-3)]} = 10^{(+2+3)} = 10^{+5}$$

$$10^{-2} / 10^{+3} = 10^{[(-2)-(+3)]} = 10^{(-2-3)} = 10^{-5}$$

$$10^{-2} / 10^{-3} = 10^{[(-2)-(-3)]} = 10^{(-2+3)} = 10^{+1}$$

$$\left(10^{+2}\right)^{+3} = 10^{[(+2)\cdot(+3)]} = 10^{+6}$$

$$\left(10^{+2}\right)^{-3} = 10^{[(+2)\cdot(-3)]} = 10^{-6}$$

$$\left(10^{-2}\right)^{+3} = 10^{[(-2)\cdot(+3)]} = 10^{-6}$$

$$\left(10^{-2}\right)^{-3} = 10^{[(-2)\cdot(-3)]} = 10^{+6}$$

$$\sqrt[3]{10^{2}} = 10^{2/3}$$

$$\sqrt[2]{10^{4}} = 10^{4/2} = 10^{2}$$

Notazione Esponenziale o Scientifica

In fisica si ha a che fare sia con numeri molto grandi sia con numeri molto piccoli, come ad esempio la *Distanza terra-sole: 149000000000 m* oppure il *Raggio dell'atomo di idrogeno: 0,00000000005 m.*
Scrivere questi numeri normalmente è scomodo e si rischia di sbagliare. Possiamo però scriverli in forma compatta come **prodotto di un altro numero compreso fra 1 e 10 per una potenza di 10**, usando cioè la **notazione esponenziale.**

Nella **NOTAZIONE ESPONENZIALE** si deve quindi mettere la **prima cifra diversa da 0** del numero di partenza, **la virgola** e **tutte le altre cifre**; poi **moltiplicare per la potenza di 10** con esponente dato dal **numero di posti di cui si è spostata la virgola**. L'esponente è:

- **POSITIVO se il numero di partenza è maggiore di 1**
- **NEGATIVO se il numero di partenza è minore di 1 (cioè se inizia per zero)**

Esempi:

149000000000 m = $1,49 \cdot 10^{+11}$ m;

0,00000000005 m = $5,0 \cdot 10^{-11}$ m;

1234,56 = $1,23456 \cdot 10^{+3}$;

0,000060987 = $6,0987 \cdot 10^{-5}$;

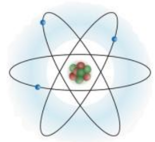
99,6789 = $9,96789 \cdot 10^{+1}$;

0,003676543 = $3,676543 \cdot 10^{-3}$;

Ordine di Grandezza (OdG)

Come abbiamo già detto in fisica si ha a che fare con grandezze infinitamente piccole (ad es. la massa di particelle subatomiche) e con grandezze infinitamente grandi (ad es. le dimensioni delle galassie).

Consideriamo ad esempio nel caso della **massa**:



Massa dell'elettrone: $9{,}109 \times 10^{-31}$ kg

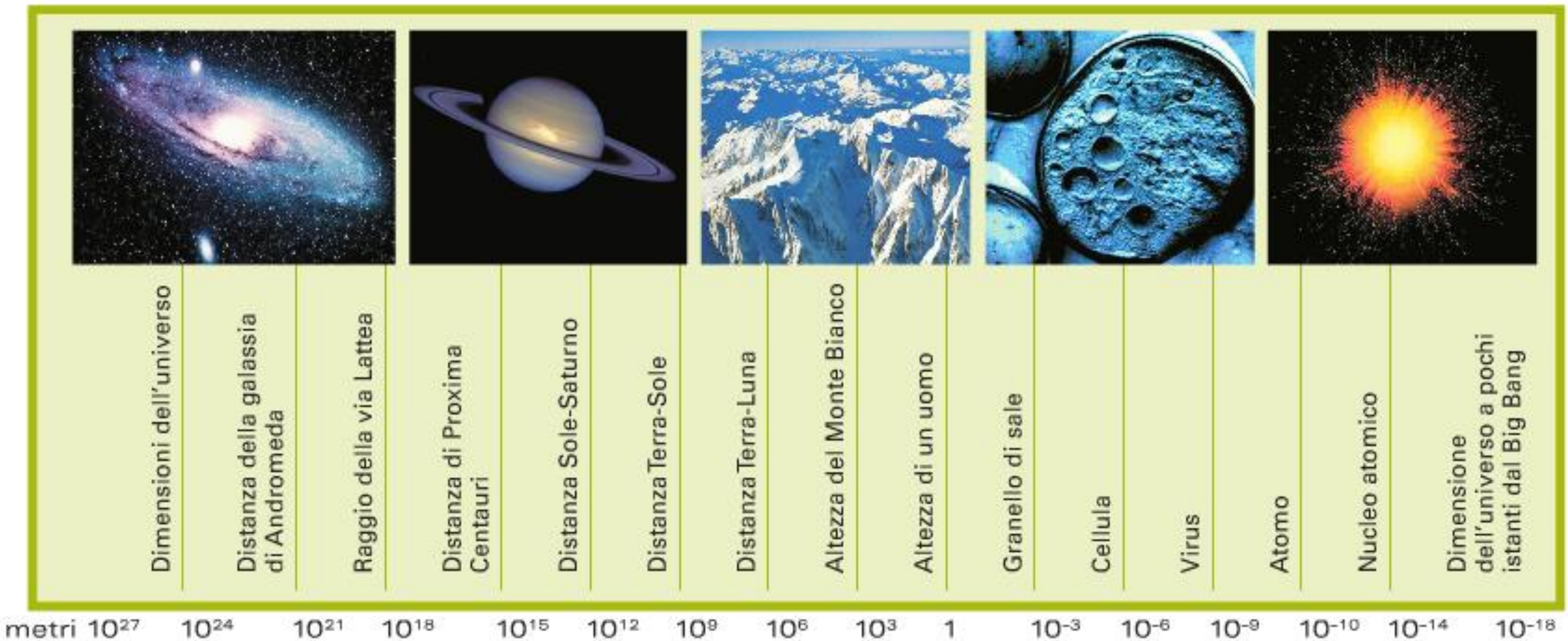
Massa di un uomo: $8{,}5 \times 10$ kg

Massa del Sole: $1{,}98 \times 10^{+30}$ kg

Ordine di Grandezza (OdG)

2/3

Oppure nel caso delle **lunghezze**:



Proprio per questa estrema variabilità è utile avere un'idea immediata, anche se approssimativa, del valore del nostro dato.
Per ottenere ciò consideriamo l'ordine di grandezza, che è così definito:

Ordine di Grandezza (OdG)

L'**Ordine di Grandezza** di una misura è la potenza di 10 più vicina al numero.

Per determinare l'OdG di un dato occorre:

1. Esprimere il dato in notazione esponenziale;
2. Valutare l'esponente della potenza di 10 e la prima cifra del dato:
   1. Se la prima cifra è < 5 => OdG = Esponente;
   2. Se la prima cifra è ≥ 5 => OdG = Esponente +1.

Esempi:

1. Massa del Sole: $1{,}98 \times 10^{+30}$ kg => OdG = 10^{+30} kg;
2. Massa dell'elettrone: $9{,}1093826 \times 10^{-31}$ kg => OdG = 10^{-30} kg;
3. Raggio della Terra: $6{,}371 \times 10^{+6}$ m => OdG = 10^{+7} m;
4. Raggio Nucleo atomo idrogeno: $1{,}5 \times 10^{-15}$ m => OdG = 10^{-15} m;

Prefissi: Multipli e Sottomultipli

Anteponendo dei **prefissi** alle unità di misura otteniamo i **multipli** e i **sottomultipli** delle unità di misura.

Ai prefissi corrispondono le potenze di 10 che moltiplichiamo per l'unità di misura di partenza.

Se l'esponente è positivo abbiamo i multipli, se è negativo i sottomultipli.

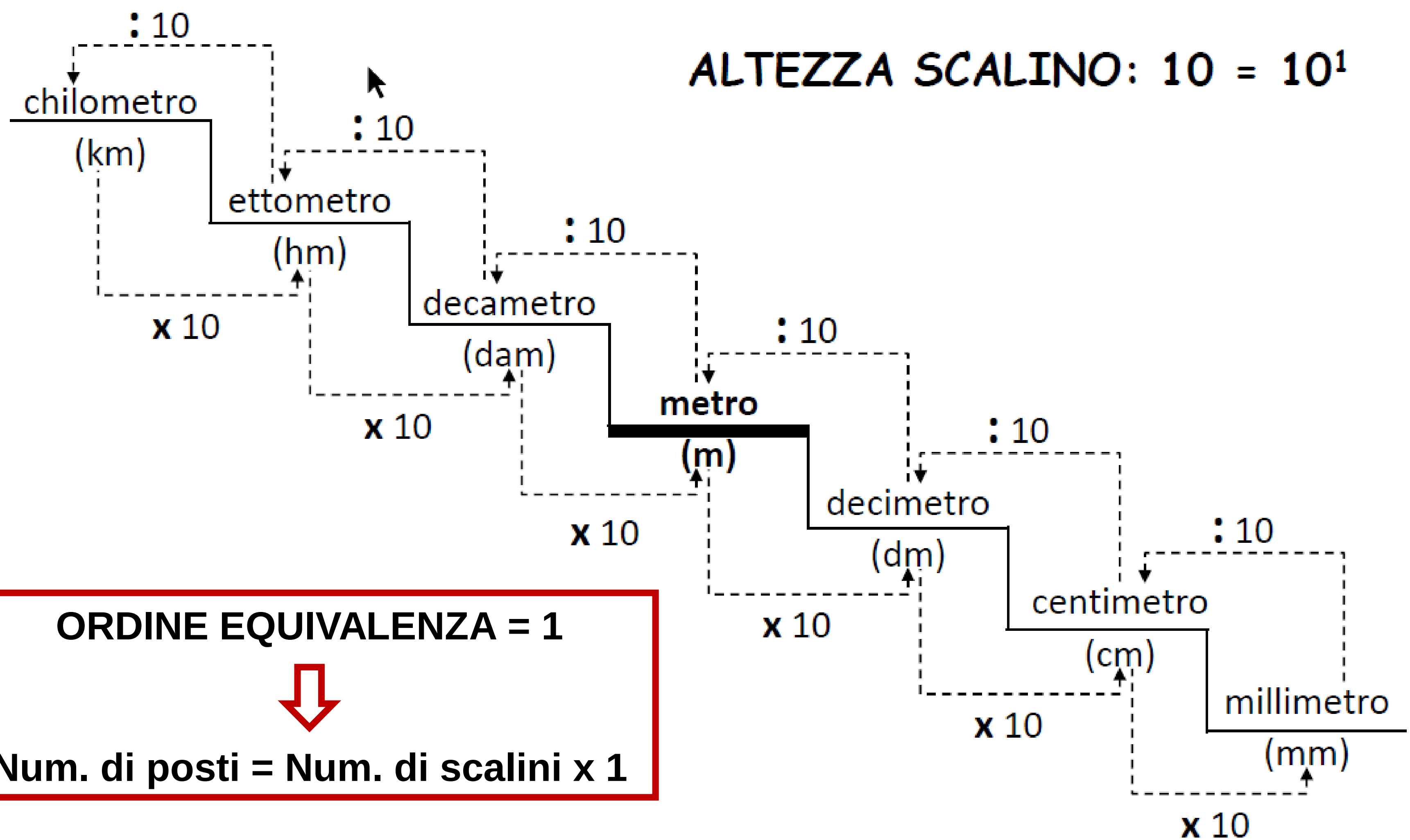
Prefisso	Simbolo	Moltiplica per		
		10^n	Numero decimale	Si legge
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000	Bilione
giga	G	10^9	1 000 000 000	Miliardo
mega	M	10^6	1 000 000	Milione
chilo	k	10^3	1 000	Mille
etto	h	10^2	100	Cento
deca	da	10^1	10	Dieci
---	---	10^0	1	Unità
deci	d	10^{-1}	0,1	Decimo
centi	c	10^{-2}	0,01	Centesimo
milli	m	10^{-3}	0,001	Millesimo
micro	μ	10^{-6}	0,000 001	Milionesimo
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001	Miliardesimo
pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001	Bilionesimo

Sistema Metrico Decimale

Misure Lineari

Il sistema Metrico Decimale si chiama così perché nella scala delle misure si procede con passo 10 e/o multiplo di 10.

ALTEZZA SCALINO: 10 = 10^1



ORDINE EQUIVALENZA = 1

⇩

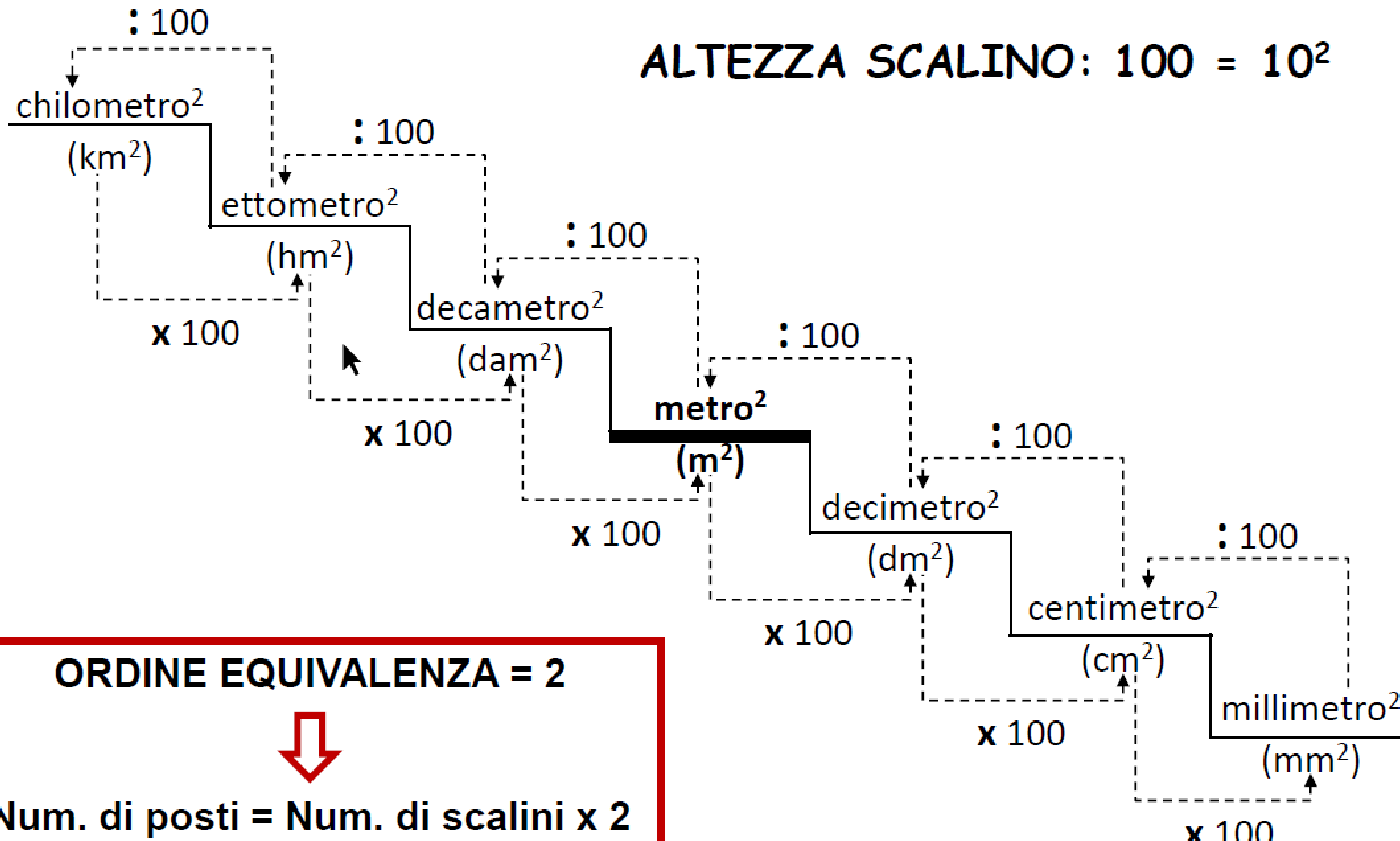
Num. di posti = Num. di scalini x 1

Sistema Metrico Decimale

Misure Superficiali

$$1\ m^2 = (1\ m)\ (1\ m\ ) = (10^1\ dm)\ (10^1\ dm) = 10^2\ dm^2 = 100\ dm^2$$

ALTEZZA SCALINO: 100 = 10^2



ORDINE EQUIVALENZA = 2

⇩

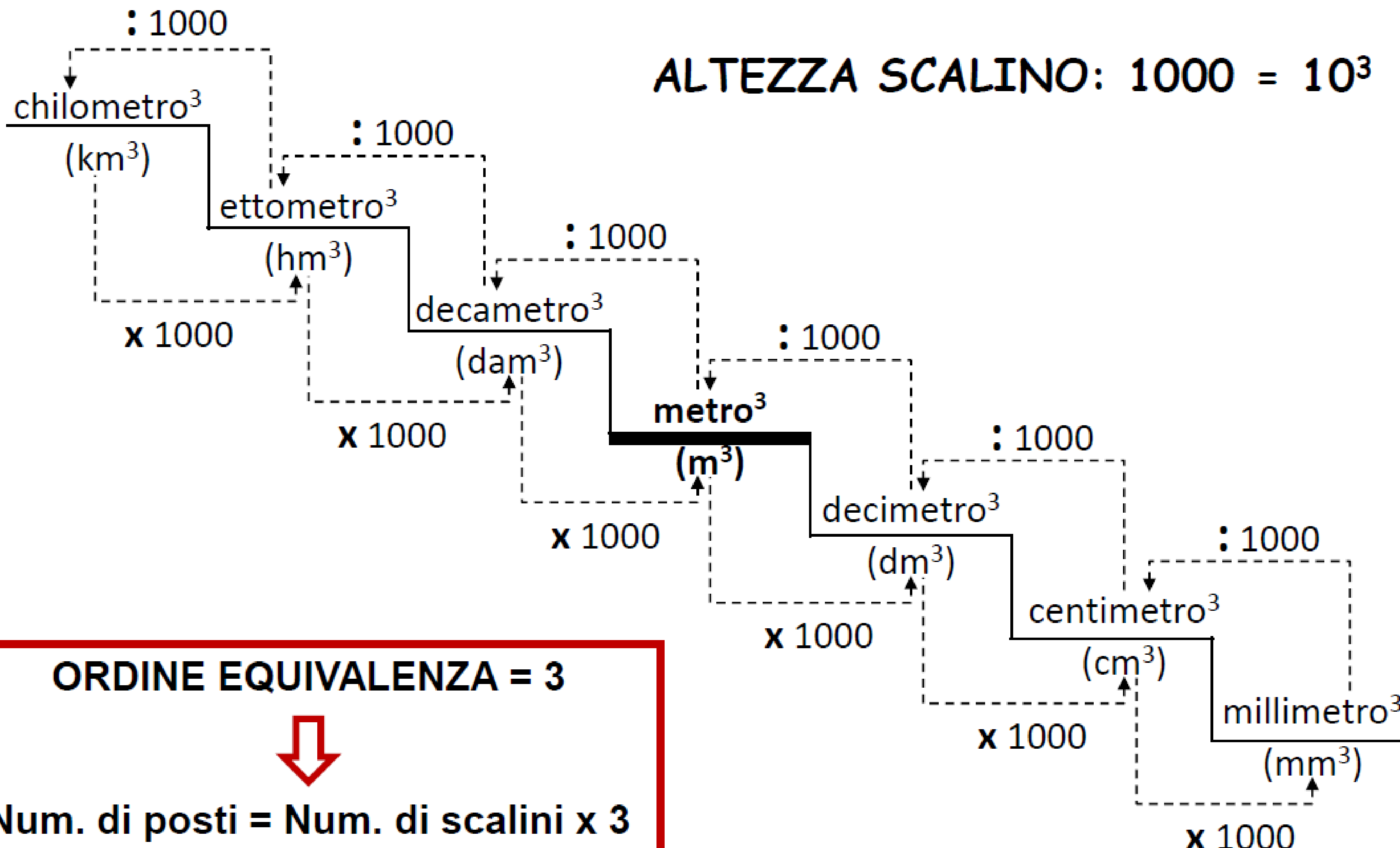
Num. di posti = Num. di scalini x 2

Sistema Metrico Decimale

Misure Volumetriche

$$1\ m^3 = (1\ m)\ (1\ m)\ (1\ m) = (10^1\ dm)\ (10^1\ dm)\ (10^1\ dm) = 10^3\ dm^3 = 1000\ dm^3$$

ALTEZZA SCALINO: 1000 = 10^3



ORDINE EQUIVALENZA = 3

⇩

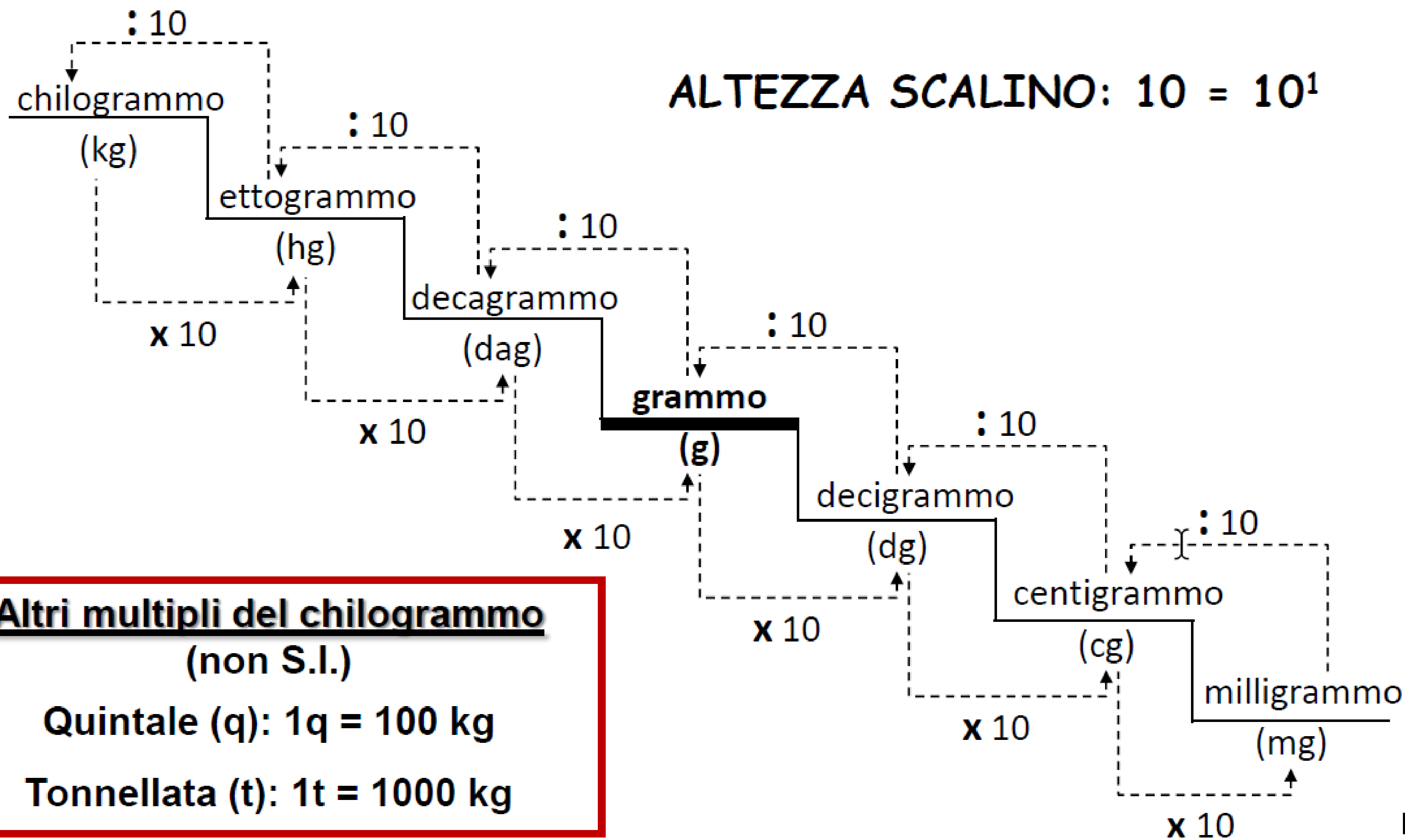
Num. di posti = Num. di scalini x 3

Sistema Metrico Decimale

Misure di Massa

La scala delle masse è identica a quella delle lunghezze, con la sola differenza di avere il **grammo** a posto del **metro** (e quindi nei simboli "**g**" al posto di "**m**").

ALTEZZA SCALINO: 10 = 10^1



Altri multipli del chilogrammo
(non S.I.)

Quintale (q): 1q = 100 kg

Tonnellata (t): 1t = 1000 kg

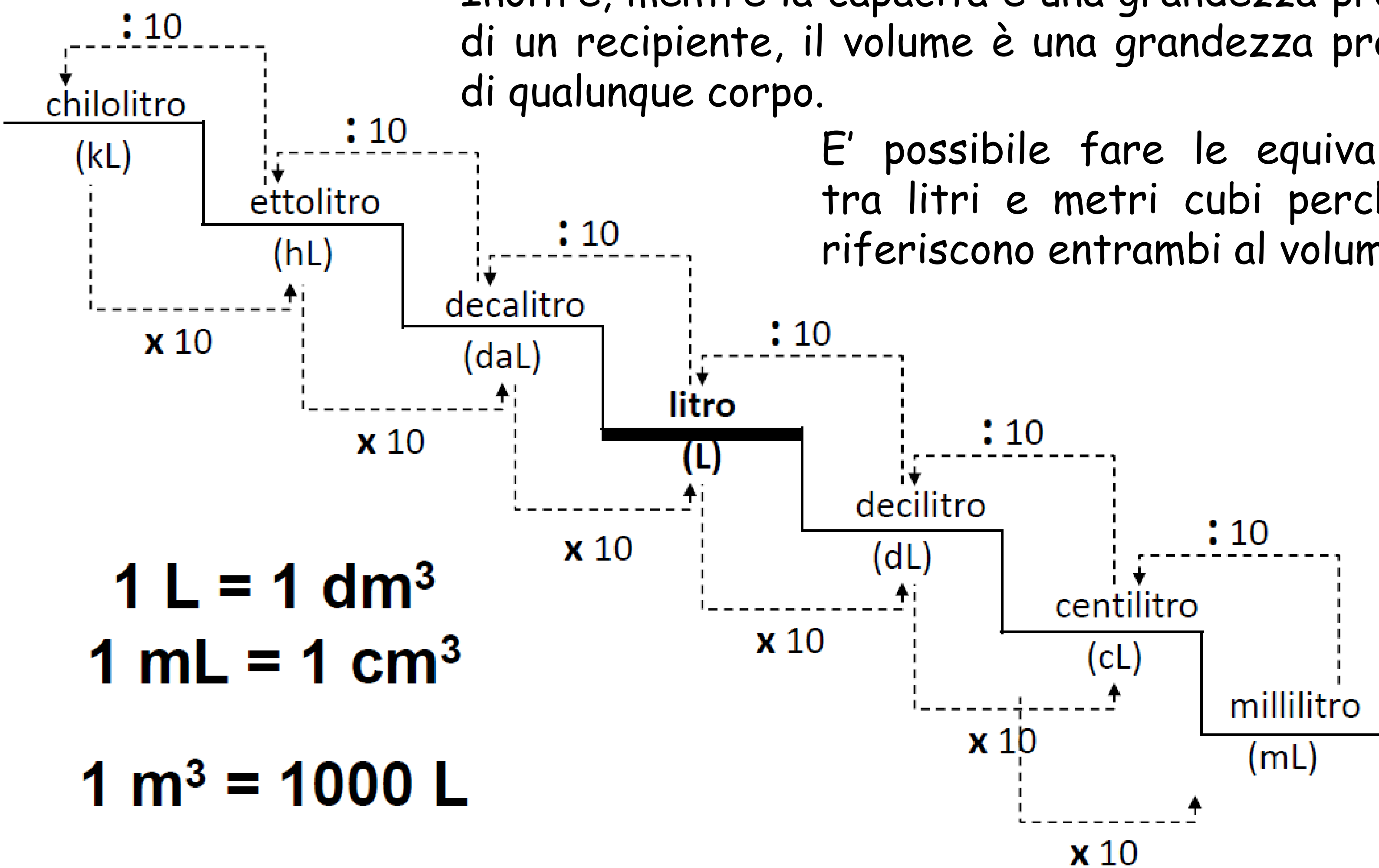
Sistema Metrico Decimale

Misure di Capacità

La **capacità** corrisponde al **volume** di fluido che un recipiente può ospitare, mentre il volume può riferirsi a qualsiasi stato di aggregazione (solido, liquido, gassoso).

Inoltre, mentre la capacità è una grandezza propria di un recipiente, il volume è una grandezza propria di qualunque corpo.

E' possibile fare le equivalenze tra litri e metri cubi perché si riferiscono entrambi al volume.



$$1\ L = 1\ dm^3$$

$$1\ mL = 1\ cm^3$$

$$1\ m^3 = 1000\ L$$

Equivalenze

Equivalenze (1/4)

Per imparare a fare le equivalenze con il sistema metrico decimale, bisogna innanzitutto conoscere la scala delle misure ed **impararla a memoria**:

X →

chilometro (km)	ettometro (hm)	decametro (dam)	**metro (m)**	decimetro (dm)	centimetro (cm)	millimetro (mm)

← :

Esistono altri multipli e sottomultipli, ma per ora non li considereremo.
Quindi, per la scala che stiamo considerando, il km è la misura più grande e il millimetro è la misura più piccola.

In un'equivalenza ci si deve spostare verso destra (e moltiplicare) o verso sinistra (e dividere) della scala, a seconda di quello che si deve fare:

- se si deve passare da **un'unità di misura più grande in una più piccola** (cioè andare verso destra) si deve moltiplicare e aggiungere tanti zeri (o spostare la virgola verso destra) per quanti sono i posti di cui ci si sposta;
- se si deve passare da **un'unità di misura più piccola in una più grande** (cioè andare verso sinistra) si deve dividere e aggiungere tanti zeri (o spostare la virgola verso sinistra) per quanti sono i posti di cui ci si sposta;

Equivalenze

Facciamo qualche esempio:

ES. 1: 3 km = ? m

da chilometri a metri ti devi spostare di 3 posti verso destra sulla scala (hm, dam e m) e quindi devi moltiplicare per 1000 e aggiungere 3 zeri:

$$3\ km = 3000\ m = 3 \cdot 10^3\ m$$

ES. 2: 240000 cm = ? hm

da centimetri a ettometri ti devi spostare di 4 posti verso sinistra sulla scala (dm, m dam, hm) e quindi devi dividere per 10.000 e spostare la virgola verso sinistra di 4 posti:

$$24000\ cm = 2{,}4000\ hm = 2{,}4\ hm$$

chilometro (km)	ettometro (hm)	decametro (dam)	**metro (m)**	decimetro (dm)	centimetro (cm)	millimetro (mm)

Equivalenze

Un metodo molto pratico per fare velocemente le equivalenze, soprattutto nel caso di superfici e volumi, è utilizzare la notazione esponenziale e **moltiplicare** il valore da convertire per:

$$\boxed{(10^{n})^{\pm p}}$$

dove:

n = ordine dell'equivalenza (1: lineare, 2: superficiale, 3: volumetrica);

p = numero di passi da fare lungo la scala;

± = + se si scende nella scala delle misure, - se si sale.

Equivalenze

Facciamo qualche esempio:

ES. 1: $3\ km = ?\ m$

$$3\ km = 3 \cdot (10^1)^{+3}\ m = 3 \cdot 10^3\ m$$

ES. 2: $2{,}4\ cm^2 = ?\ hm^2$

$$2{,}4\ cm^2 = 2{,}4 \cdot (10^2)^{-4}\ hm^2 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\ hm^2 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\ hm^2$$

ES. 3: $0{,}7\ dam^3 = ?\ mm^3$

$$0{,}7\ dam^3 = 0{,}7 \cdot (10^3)^{+4}\ mm^3 = 0{,}7 \cdot 10^{12}\ mm^3 = 7 \cdot 10^{11}\ mm^3$$

chilometro (km)	ettometro (hm)	decametro (dam)	metro (m)	decimetro (dm)	centimetro (cm)	millimetro (mm)

Proporzioni e Percentuali

Una **PROPORZIONE** è una uguaglianza tra due rapporti:

$$A : B = C : D$$

per cui vale:

$$B \cdot C = A \cdot D$$

Una **PERCENTUALE** è una particolare proporzione in cui uno dei termini è fisso a 100:

$$P : 100 = N : T$$

per cui vale:

$$N = (P \cdot T)/100$$

Relazioni fra Grandezze Fisiche

(1/2)

Due grandezze fisiche sono **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI** se e solo se il loro **rapporto** è costante:

$$\left(y,x\right) DIRETTAMENTE\ PROPORZIONALI \iff \frac{y}{x}=k \quad \left(\mathrm{cost.}\right)$$

Il grafico della variabile dipendente y in funzione della variabile indipendente x è una **retta passante per l'origine**.

Due grandezze fisiche sono **INVERSAMENTE PROPORZIONALI** se e solo se il loro **prodotto** è costante:

$$\left(y,x\right) INVERSAMENTE\ PROPORZIONALI \iff y \cdot x=k \quad \left(\mathrm{cost.}\right)$$

Il grafico della variabile dipendente y in funzione della variabile indipendente x è una **iperbole**.

Relazioni fra Grandezze Fisiche

(2/2)

Due grandezze fisiche sono **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI AL QUADRATO** se il **rapporto** tra una grandezza ed il quadrato dell'altra è costante:

$$(y,x)(DIRETTAMENTE\ PROPORZIONALI)^2 \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^2}=k \quad (\mathrm{cost.})$$

Il grafico della variabile dipendente y in funzione della variabile indipendente x è una **parabola**.

Due grandezze fisiche sono in **RELAZIONE LINEARE** se il grafico che le rappresenta è una retta:

$$(y,x)\, in\ RELAZIONE\ LINEARE \Leftrightarrow y=kx+a$$

Il grafico della variabile dipendente y in funzione della variabile indipendente x è una **retta non passante per l'origine**.

N.B.: La diretta proporzionalità è un caso particolare di relazione lineare in cui la costante aggiuntiva (intercetta) è nulla (a=0).

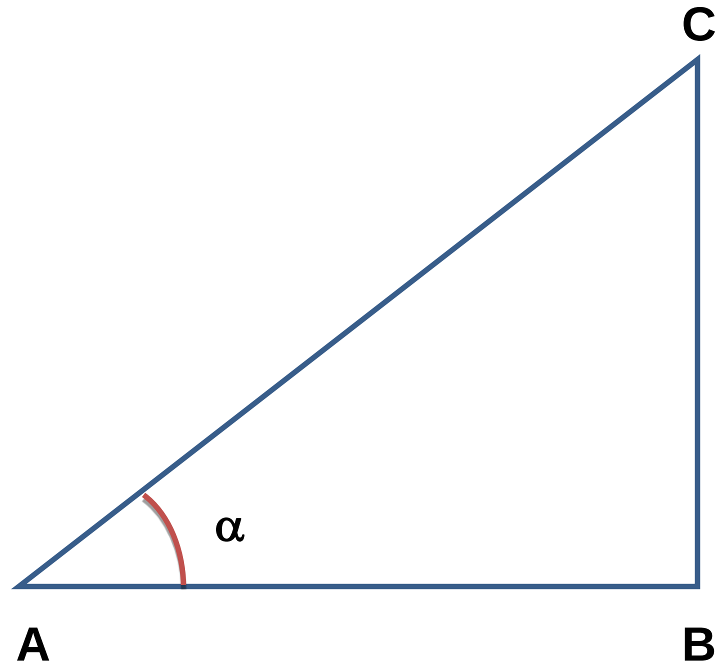
Funzioni Goniometriche

Seno, Coseno, Tangente

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad BC = AC \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad AB = AC \cdot \cos\alpha$$

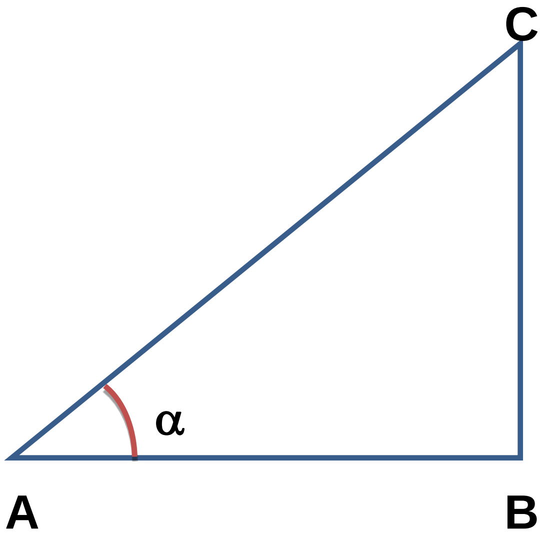
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} \quad \Rightarrow \quad BC = AB \cdot \tan\alpha$$



Funzioni Goniometriche

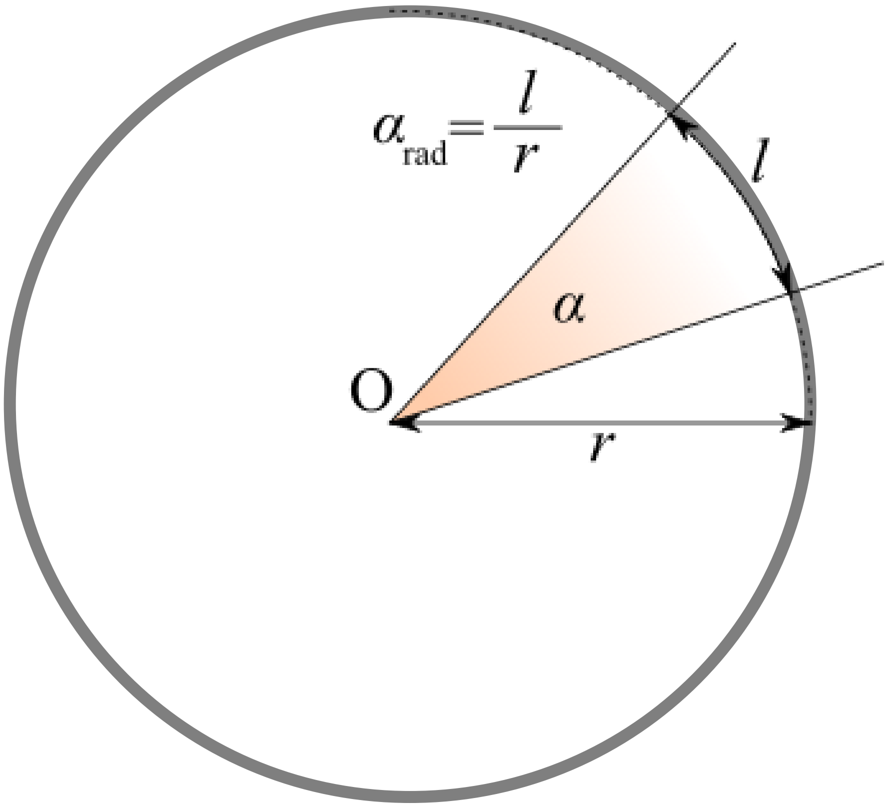
Valori per angoli particolari

	sen α	cos α	tan α
0° (0 – 2π)	0	1	0
30° (π/6)	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° (π/4)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° (π/3)	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90° (π/2)	1	0	---
180° (π)	0	-1	0



Radianti

Il **RADIANTE** (generalmente indicato rad) rappresenta il rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza spazzato dall'angolo, e la lunghezza del raggio di tale circonferenza.



Un radiante è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza:

$$\alpha_{rad} = \frac{\ell}{r} \;;$$

$$\alpha_{rad} = 1 \iff \ell = r$$

Radianti

Poiché la circonferenza ha una lunghezza pari a 2πr, il valore in radianti dell'angolo giro (360°), che sottende la circonferenza, è dato da:

$$\alpha_{rad} = \frac{\ell}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Esiste quindi una proporzionalità fra l'angolo in radianti e l'angolo in gradi:

$$\alpha_{rad} : \alpha° = 2\pi : 360°$$

Per le conversioni valgono quindi le relazioni:

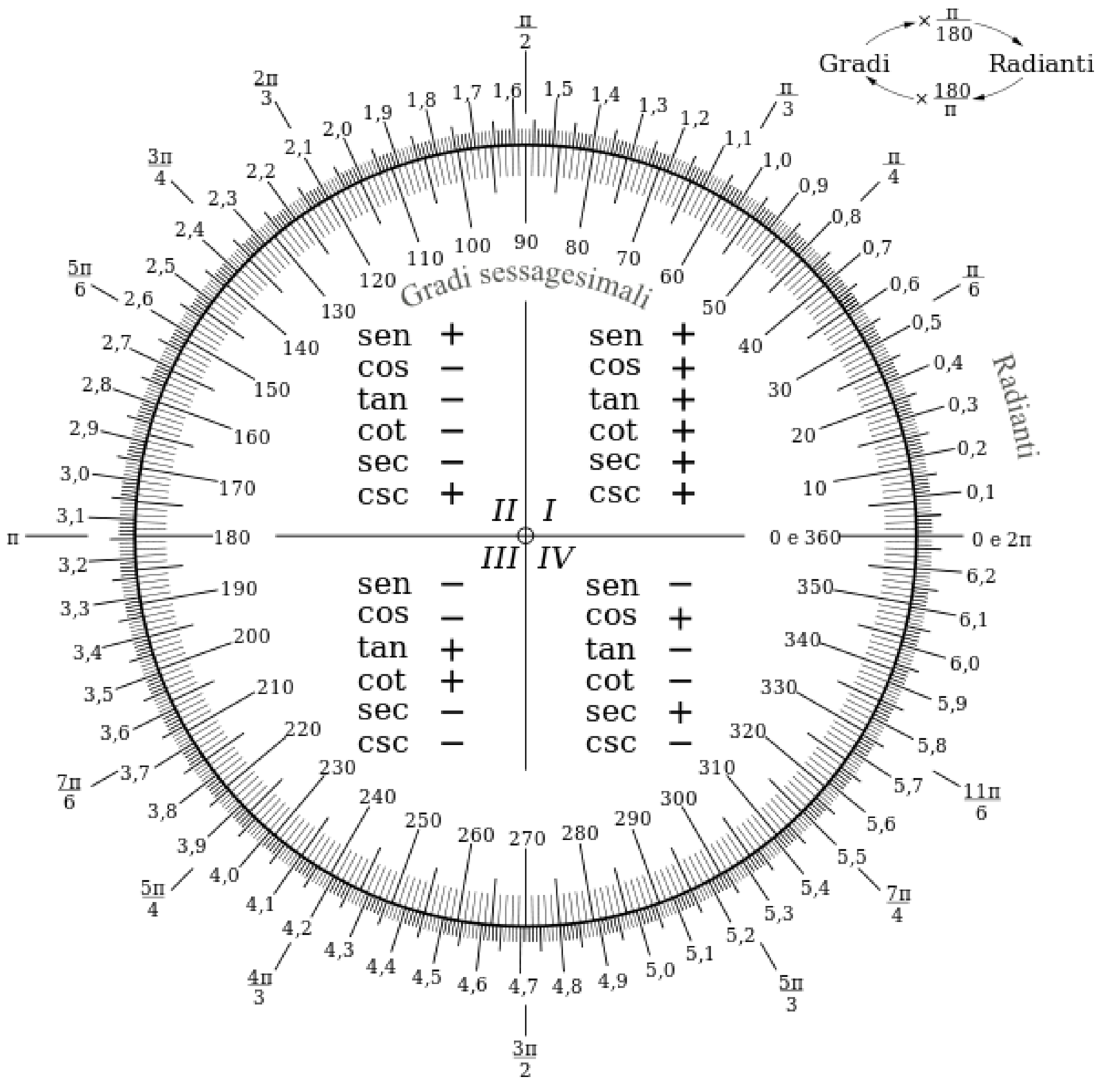
$$\alpha_{rad} = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha°; \quad \alpha° = \frac{360°}{2\pi} \cdot \alpha_{rad};$$

Pertanto la misura in gradi di 1 radiante è data da:

$$\alpha° = \frac{360°}{2\pi} \cdot 1 \approx 57°$$

Radianti

Tabella Conversione Radianti – Gradi



GRADI	RADIANTI
0	0
15	π/12
30	π /6
45	π /4
60	π /3
90	π /2
120	2/3 π
135	3/4 π
150	5/6 π
180	π
210	7/6 π
225	5/4 π
240	4/3 π
270	3/2 π
300	5/3 π
315	7/4 π
330	11/6 π
360	2π